<u>Settore di Ingegneria</u>

<u>Prove di Matematica</u>

- Determinare tutte le coppie (x, y) di numeri interi tali che:

$$x^4 + 3x^2y^2 + 9y^4 = 12^{2006}.$$

- Al Casinò di Montecarlo (comune della provincia di Lucca) va di moda il “Gioco dei Pacchi”.
  Un giocatore paga 35 euro per una partita. Di fronte al giocatore vengono posti 4 pacchi chiusi, contenenti rispettivamente 10, 20, 30, 40 euro. Ovviamente il giocatore non sa il contenuto di ciascun pacco. A questo punto il giocatore può aprire un pacco a sua scelta e, una volta visto il contenuto, può accettarlo o rifiutarlo: se accetta incassa la cifra contenuta nel pacco stesso e la partita finisce, se rinuncia può aprire un secondo pacco a sua scelta. Visto il contenuto del secondo pacco, il giocatore può ancora una volta accettare o rifiutare. Se accetta incassa la cifra contenuta nel secondo pacco e la partita finisce, se rifiuta apre un terzo pacco, e questa volta è obbligato ad accettarne il contenuto.
  Due amici, Marco e Tullio, si apprestano a trascorrere una serata al Casinò, durante la quale giocheranno più volte al Gioco dei Pacchi. Discutendo sulle strategie da attuare, Tullio afferma: “Potendo aprire 3 pacchi, prima o poi quello da 30 o quello da 40 euro lo trovo. Appena esce uno di questi due pacchi io accetto”. Marco invece afferma: “Io accetto solo se mi arriva il pacco da 40 euro, se proprio non esce vorrà dire che mi tengo il contenuto del terzo pacco”.
  Determinare, alla lunga, che cosa possono aspettarsi i 2 amici dalle loro strategie
  E voi, come giochereste?

- È ben noto che più ci si alza rispetto alla superficie terrestre e più è possibile vedere (o essere visti da) lontano.

a. Un satellite si trova ad altezza h sulla verticale di un punto P della superficie terrestre . determinare la massima distanza da P sulla superficie terrestre alla quale è ancora possibile vedere il satellite.
b. Una ditta di telecomunicazioni vorrebbe piazzare 4 satelliti in modo che da ogni punto della superficie terrestre sia possibile vederne almeno uno. Per ragioni tecniche, la massima altezza da terra alla quale i satelliti possono essere lanciati è uguale al doppio del raggio terrestre. Determinare se la ditta può raggiungere il suo scopo.
c. Determinare se, in assenza del vincolo sulla massima altezza raggiungibile, sarebbe possibile disporre opportunamente 3 satelliti in modo che da ogni punto della superficie terrestre sia possibile vederne almeno uno.

(Nota: si approssimi la Terra con una sfera di raggio R).

- Si consideri il gioco seguente: su una scacchiera n x n si mette una moneta nella casella in alto a sinistra e due giocatori A e B muovono a turno, cominciando da A, la moneta. Ogni mossa consiste nello spostare la moneta di una casella, in orizzontale oppure in verticale, evitando di occupare le caselle già occupate in precedenza (sia da A che da B). Perde chi non riesce più a muovere la moneta in una casella ammissibile.
  Determinare, in funzione del numero n, quale tra i 2 giocatori ha una strategia vincente.

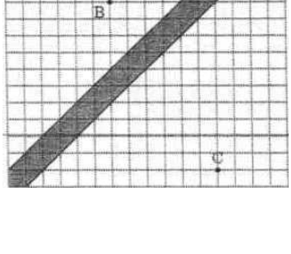
- Un piccolo Sudoku è una tabella 4 x4, a sua volta suddivisa in quattro piccole tabelle 2 x 2: ciascuna delle 16 caselle della tabella contiene una cifra (scelta tra 1, 2, 3, 4), in modo che in nessuna delle 4 righe delle 4 colonne, e delle 4 tabelle 2 x 2 contenga più di una volta la stessa cifra.
  La tabella qui accanto rappresenta un esempio di piccolo Sudoku.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

(a) Supponiamo che una delle diagonali del piccolo Sudoku contenga 4 cifre diverse. Dimostrare che anche l'altra diagonale contiene 4 cifre diverse.
(b) Determinare quanti sono i piccoli Sudoku in cui anche la diagonali contengono 4 cifre diverse.
(c) Determinare quanti sono i possibili piccoli Sudoku.

- La figura sottostante, in cui il lato di ogni quadratino corrisponde a 100 metri, rappresenta un fiume ed un suo affluente. Nella zona è possibile costruire strade lungo qualunque tracciato, con l'unico vincolo che gli eventuali ponti devono risultare perpendicolari alla direzione dei rispettivi corsi d'acqua.

(a) Determinare la lunghezza minima possibile per una strada (eventuali ponti compresi) che unisce il punto A ed il punto B.
(b) Determinare la lunghezza minima possibile per una strada (eventuali punti compresi) che unisce il punto A ed il punto C.



- La Scuola Sant'Anna ha deciso di partecipare al campionato di Formula Uno con una vettura, e si sta preparando per il prossimo gran premio che si svolgerà sul circuito di Montecarlo (comune della provincia di Lucca). I suoi ingegneri hanno a disposizione i seguenti dati:
  - la gara consiste in 120 giri di pista;
  - la capacità del serbatoio della vettura permette, se necessario, di completare la gara senza alcun pit-stop.
  - Per un pit-stop si impiegano 30 secondi in totale, compresi i tempi di rallentamento ed accelerazione, indipendentemente dalla quantità di carburante immessa;
  - per ogni giro si consumano, indipendentemente da ogni altro parametro, 3 kg di carburante;
  - il tempo di percorrenza di un giro aumenta di 3 centesimi di secondo per ogni kg di carburante in più presente nel serbatoio all'inizio del giro stesso;

  Determinare la strategia (cioè il numero dei pit-stop da effettuare ed i giri nei quali effettuarli) per permettere di terminare la gara nel minor tempo possibile.

- Una commissione deve assegnare una borsa di studio scegliendo tra due candidati: Paolo e Francesca. Il concorso consiste in una prova scritta che comprende n problemi. Ogni problema può essere valutato "risolto", oppure "non risolto", senza gradazioni intermedie. Il candidato che risolve il maggior numero di problemi ottiene la borsa di studio; in caso di parità la commissione "tira la monetina", scegliendo con uguale probabilità tra i due candidati. Il giorno del concorso la preparazione di Paolo gli permette di risolvere ogni problema con probabilità di 1/2, mentre quella di Francesca gli consente di risolvere ogni problema con probabilità 2/3.

(a) Nel caso n = 1, determinare la probabilità che Paolo vinca la borsa di studio.

(b) Nel caso n = 2, determinare la probabilità che Francesca vinca la borsa di studio.

(c) Dimostrare che, nel caso in cui vengono assegnati n problemi, la commissione dovrà ricorrere alla monetina con probabilità strettamente maggiori i (1/2)n.

- Determinare tutte le coppie (m,n) di interi positivi per cui

$$\sqrt[60]{m^{n^5-n}}$$

risulta a sua volta un intero.

- È ben noto che in Svizzera la benzina costa meno che in Italia, e che il suo prezzo sale man mano che ci si avvicina alla frontiera. Un automobilista, diretto in Italia, fa il pieno a Zurigo e decide che nel tragitto in Svizzera si fermerà al più una volta per fare rifornimento. Arrivato alla frontiera italiana farà poi nuovamente il pieno, al prezzo italiano.
Supponendo che il consumo di benzina dell'automobile sia costante, che la capacità del serbatoio sia tale da consentire di completare il percorso anche senza soste, che ci sia un distributore in ogni punto del percorso, e che il prezzo al litro aumenti linearmente avvicinandosi alla frontiera italiana, determinare il punto economicamente più favorevole in cui fermarsi.

- Ad un torneo di tennis ad eliminazione diretta partecipano 16 giocatori. Il tabellone viene sorteggiato.
Si suppone che fra i giocatori esista una graduatoria di bravura nota a priori, che viene sempre rispettata, nel senso che in ogni incontro del torneo il giocatore migliore batte sempre quello peggiore (e non esistono giocatori della stessa bravura).

(a) Determinare la probabilità che tutti i 4 migliori giocatori accedano alle semifinali.

(b) Determinare la probabilità che il giocatore sesto per bravura acceda alle semifinali.

Nota. Il tabellone viene formato nel seguente modo: i nomi dei 16 giocatori vengono tirati a sorte, senza tener conto della bravura, e scritti di fila. A questo punto il primo sorteggiato sfida il secondo sorteggiato, il terzo sfida il quarto e così via. I giocatori che hanno vinto questi primi 8 incontri si sfidano a loro volta nei quarti di finale, nel senso che il giocatore che ha vinto il primo incontro sfida il vincente del secondo incontro, e così via. I 4 giocatori che vincono i quarti di finale si incontrano nelle semifinali, sempre con lo stesso metodo (i vincitori dei primi due quarti vanno alla prima semifinale). Infine i giocatori delle semifinali disputano la finale.

- Sono assegnati tre punti distinti su una circonferenza. Ad ogni mossa è possibile spostare uno qualsiasi dei tre punti, facendogli occupare come nuova posizione il punto medio di uno, a scelta, dei due archi di circonferenza determinati dagli altri due punti.

  (a) Determinare per quali configurazioni iniziali esiste una successione di mosse che li porta alla fine ad essere i vertici di un triangolo isoscele con due angoli minori di 1/2004-esimo di grado.

  (b) Determinare per quali configurazioni iniziali esiste una successione di mosse che li porta alla fine ad essere i vertici di un triangolo equilatero.

- Sia m un intero positivo. Dimostrare che la soluzione dell'equazione
$$10^x = m$$
o è intera, o è irrazionale.

- Considerare la funzione
$$y = \frac{4x}{1+4x^2}$$
  (a) Limitatamente all'insieme delle x>0,
  a.1 provare che y è limitata;
  a.2 determinare il valore massimo;
  a.3 dedurre, da ***a.2***, che $x=1/2$ è il punto di massimo;

a.4 provare che, per x>1/2, la funzione è decrescente.

(b) Dedurre da (a) l'andamento della funzione su tutto l'asse reale.

È fatto assoluto divieto di usare derivate o qualsiasi utensile che appartenga all'analisi.

- Assegnata nel piano una unità di misura per le lunghezze ed un punto P, costruire un triangolo equilatero ABC in modo che P sia interno ad ABC, $\overline{PA} = 2, \overline{PB} = 3, \overline{PC} = 4$.

- Due amici scrivono, ognuno su un foglio, un numero intero positivo e lo consegnano ad una terza persona. Costui scrive sulla lavagna due numeri, s_1 e s_2 , dicendo che la somma dei due numeri ricevuti è s_1 o s_2 .
  Il primo dei due amici dice allora: "*Non sono in grado di sapere se tale somma è s_1 o s_2*".
  Una ulteriore persona, presente per caso, dice a sua volta al secondo: "*Ora tu sei in grado di saperlo*".
  Quale relazione fra s_1 e s_2 e permette a questo ultimo di fare l'asserzione?

- Dimostrare che ogni numero intero positivo può essere scritto (ed in modo unico) nella forma:

$$a_1 \cdot 1!+a_2 \cdot 2!+a_3 \cdot 3!+....+a_k \cdot k!$$

  ove $\forall i\ a_i \in [0,i]$ (ovviamente $a_k \neq 0$).

- Dimostrare che per ogni intero n ≥ 1 il numero reale:

$$\sqrt{4n-1}$$

  è irrazionale.

- Un'automobile ha inizialmente il serbatoio vuoto e deve percorrere un circuito circolare in senso antiorario. Per percorrere la pista è necessaria una certa quantità di carburante che è divisa in tre parti non necessariamente

uguali. Dimostrare che, comunque si dispongano sul circuito i tre rifornimenti, esiste sempre un punto partendo dal quale l'automobile riesce a completare il percorso.
Si provi a generalizzare la proposizione al caso di *n* rifornimenti.

- Determinare i numeri reali x>0 tali che:

$$1 + x - x^2 \geq x^x$$

- Dividere con riga e compasso un cerchio assegnato in nove parti di uguale superficie.
N.B. le parti trovate non devono necessariamente essere sovrapponibili.

- Sapendo che la scrittura

$$v = \text{arcsen } u$$

denota l'arco compreso -π/2 e + π/2 il cui seno è $u \in [-1,1]$, si descriva l'andamento della funzione

$$y = \text{arcsen } \sqrt{1 - x^2}$$

e se ne disegni il grafico.

È fatto assoluto divieto di servirsi delle derivate. La mancata osservanza del presente divieto provoca l'annullamento dell'esercizio.

- Risolvere in campo reale la seguente disequazione:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \geq \frac{x-2}{x+2}$$

- Si determinino i valori del parametro a per cui l'equazione

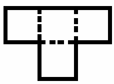
x3 - x +a = 0

ha tre radici intere.

- Dati n numeri reali $a_1,\dots, a_n$ tali che la somma $a_1+\dots+a_n$ sia diversa da 0, si dimostri che per ogni intero positivo $h \leq n$ si possono scegliere h numeri fra quelli assegnati, diciamo $a_1,\dots, a_h$. in modo che la loro somma $a_1+\dots+a_h$ sia ancora diversa da 0.

- Una pulce affetta da una strana malattia effettua salti su un piano orizzontale in qualunque direzione, ma nel seguente modo: il primo salto è lungo 1 cm, il secondo 2 cm, il terzo 4 cm, ..., l'n-esimo 2_{n-1} cm, etc.
  Può la pulce dirigere i propri salti in modo tale da tornare prima o poi al punto di partenza?

- Data una scacchiera quadrata di lato n e un numero sufficiente di tasselli della forma in figura, si determinino i valori di n per cui



- Si deve costruire un ponte di lunghezza L con un certo numero C di campate di ugual lunghezza che poggiano su piloni. Sapendo che il costo di ogni pilone è P mentre quello di ogni campata è l_2 (se l è la lunghezza della campata), si determini in funzione di L, P, C la configurazione del ponte avente costo complessivo minimo. Si tratti in particolare il caso $P = C = 1$, $L = 3{,}5$.

- Si dimostri che ogni intero $n \geq 8$ può essere scritto nella forma $n = 3a + 5b$ con a, b interi non negativi.

- Determinare tutte le radici reali dell'equazione:

$$x^{10} - x^8 + 8x^6 - 24x^4 + 32x^2 - 48 = 0$$

- Si dimostri che dati comunque n interi positivi $a_1, a_2,\dots a_n$ è sempre possibile sceglierne alcuni (eventualmente tutti od uno solo) in modo che la loro somma sia divisibile per n.

- Un bersaglio è costituito da un cerchio circondato da quattro corone circolari concentriche ed adiacenti. Le cinque circonferenze hanno raggi r, $2r$, $3r$, $4r$ e $5r$.
  A ciascuna delle zone in cui il bersaglio risulta diviso viene associato un punteggio, 5 per il cerchio centrale e 4, 3, 2 e 1 per le corone circolari dall'interno verso l'esterno.
  Un giocatore bendato scaglia a caso due freccette. Supponendo che entrambe entrino nel bersaglio, qual è il punteggio più probabilmente totalizzato?

- Sia data una scacchiera rettangolare di 125 x 35 caselle alternativamente bianche e nere nel modo usuale (essendo le caselle angolari nere).
  Quante sono le caselle attraversate in punti interni da una diagonale della scacchiera? Quante di ciascuno dei due differenti colori?

- L'ufficiale di rotta della nave N avvista una nave N' sotto l'angolo di rilevamento a (l'angolo di rilevamento è l'angolo fra la retta orientata poppa-prora di N e la retta orientata NN').
  Dopo qualche tempo l'ufficiale si accorge che la nave N' si è avvicinata e la rileva ancora sotto l'angolo a.
  Sapendo che le navi si muovono di moto rettilineo uniforme, che conseguenza si può trarre? Giustificare adeguatamente la risposta.

- Siano dati due numeri naturali non nulli m ed n; si dimostri che la rappresentazione in base b del loro quoziente non può avere periodo b-1.

- In una classe di 27 studenti il professore di matematica ha estratto a sorte l'ordine delle interrogazioni. Si viene a sapere che Andrea sarà interrogato prima di Bruno. Qual è la probabilità che Carla sia interrogata prima di Andrea?

- Sia A un punto interno ad un poligono convesso. Si dimostri che, fra le proiezioni ortogonali di A sulle rette dei lati, una almeno è interna al lato corrispondente.

- Trovare le soluzioni intere non negative del sistema:

$$\begin{cases} m^3 - n^3 - q^3 = 3mnq \\ m^2 = 2(n+q) \end{cases}$$

- Sia data la funzione

$$f(x) = \operatorname{sen}^6(x) + \cos^6 + k(\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4(x)).$$

  Determinare gli eventuali valori k per cui f è costante e quelli per cui l'equazione $f(x) = 0$ ammette soluzioni.

- Sia n un intero positivo fissato; lo si scriva come somma di due interi positivi n_1 ed n_2 e si consideri il prodotto $n_1 \cdot n_2$.
  Si scrivano poi n_1 come somma di due interi positivi n_{11} ed n_{12}, n_2 come somma di due interi positivi n_{21} ed n_{22} e si considerino i prodotti $n_{11} \cdot n_{12}$ ed $n_{21} \cdot n_{22}$.
  Si prosegua così operando "in cascata" e continuando, in ogni ramo, fino a quando non si ottiene 1.
  Si dimostri che la somma di tutti i prodotti ottenuti dipende solo da n e se ne dia una espressione esplicita.

- Dimostrare che, per ogni $x>0$, $y>0$ con $x+y<\pi/2$, si ha:

$$\operatorname{sen}(x+y)<\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)<\tan(x+y)$$

- Si vuole circoscrivere ad un cerchio di raggio r un triangolo isoscele di perimetro kr. Si dica per quali valori del parametro k il problema è risolubile.

- Trovare le soluzioni intere dell'equazione:

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

- Determinare le ultime cinque cifre (cioè quelle delle unità, decine, centinaia, migliaia e decine di migliaia) del numero

$$5^{5^5}$$

La Scuola Superiore Sant'Anna custodisce con estrema cura in una cassaforte gli elaborati dei concorsi di ammissione. Per motivi di sicurezza la Direzione ha deciso di dotare la cassaforte di un certo numero di serrature e 4 impiegati custodiscono ciascuno un certo numero di chiavi.
Qual è il numero minimo di serrature di cui deve essere dotata la cassaforte affinché per la sua apertura sia necessaria e sufficiente la presenza di 3 impiegati?

- Dato un numero naturale dispari *n*, si consideri il seguente algoritmo: si calcoli

  $$a_1 = \frac{3n+1}{2}$$

  se a_1 è pari, l'algoritmo si arresta, altrimenti si calcoli

  $$a_2 = \frac{3a_1+1}{2}$$

  se a_2 è pari, l'algoritmo si arresta, altrimenti si calcoli

  $$a_3 = \frac{3a_2+1}{2}$$

  e così via.
  Dimostrare che, qualunque sia il numero *n* considerato, l'algoritmo, ad un certo punto, si arresta, cioè la successione da esso generata

  $$a_1 \text{ , } a_2 \text{ ,...}$$

  è finita.
  Dire da quanti termini essa è costituita.

- Vi sono tre sacchetti: il primo contiene 3 palline nere e 5 bianche, il secondo ne contiene 2 nere e 4 bianche ed il terzo 3 nere e 5 bianche.
  Viene scelto, a caso uno dei tre sacchetti, e da questo, sempre a caso, viene estratta una pallina.
  Sapendo che il colore di quest'ultima è nero, qual è la probabilità che il sacchetto scelto fosse il secondo?

- Trovare gli a reali per cui la seguente equazione ha almeno una soluzione:

$$1998^{|\mathrm{sen}(x)|} = |\mathrm{sen}(ax)|^{1998}$$

- Cosa si può dire di due corde di una circonferenza che si dimezzano scambievolmente?

- Provare che, se in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico le coordinate dei vertici sono numeri razionali, allora l'area è un numero razionale.

- Determinare la probabilità di ottenere una somma ≤ 14 gettando tre dadi.

- Un imprenditore deve trasportare una certa quantità, q tonnellate, di merce fra due località. Per far questo si presentano tre possibilità:

  (a) ricorrere ad una compagnia di autotrasporti, la quale applica un prezzo (in milioni di lire) pari a 2x (dove x è la quantità di merce trasportata);

  (b) ricorrere al trasporto marittimo, il cui prezzo (in milioni) è dato da $1 + x^2/3$ (x è la quantità di merce trasportata);

  (c) ricorrere ad una strategia mista, cioè spedire parte della merce via terra e parte via mare.

  Si determini il prezzo minimo del trasporto in funzione di q.

- Trovare tutte le soluzioni reali dell'equazione:

$$x[x[x]] = 84.$$

- Consideriamo un lago circolare di 1 km di diametro. Sia AB un diametro e sia C il punto medio di una delle semicirconferenze delimitate da A e da B. Un istituto di ricerca vuole costruire una piattaforma sul lago, posizionata in un punto del diametro AB. Per rendere operativa la piattaforma occorrono due tipi di collegamento, entrambi realizzati dalla stessa ditta:

- cavi elettrici, collegati in linea retta con C (costo: 1 euro al metro);
- cavi con fibre ottiche, collegati in linea retta con il punto più vicino tra A e B (costo: 5 euro al metro).

Uno sponsor si è offerto di pagare la minore tra le due spese di cui ai punti precedenti; la rimanente spesa graverà sulle casse dell'istituto.

(a) A quale distanza dal centro del lago conviene che l'istituto di ricerca posizioni la piattaforma, se vuole minimizzare le spese a suo carico?

(b) Qual è la posizione più conveniente per la ditta (cioè che le farebbe guadagnare di più)?

- Un tizio gioca nel seguente modo. Punta su un numero compreso fra 1 e 6, e tira un dado perfettamente equilibrato.
  Supponiamo che esca il punteggio n. Egli, allora, ritira il dado fino a quando non esce un punteggio non superiore ad n, diciamo k.
  Se il numero k è quello su cui aveva puntato, egli vince e guadagna k gettoni, non vince e non guadagna nulla.
  A lungo andare su quale numero è più conveniente puntare?

- Siano dati n punti nel piano, con la proprietà che presi comunque due di essi ne esiste un terzo giacente sulla retta passante per i primi due. Dimostrare che allora tutti gli n punti stanno sulla stessa retta.

- Trovare il più piccolo intero positivo tale che la scrittura in base 10 del suo cubo termina con le tre cifre 111.

- Nel centro di una piazza sono state sospese due sfere. La prima ha raggio r ed il suo centro sta ad altezza h, la seconda ha raggio R ed il suo centro sta ad altezza $h + d$ (si supponga $h > r$, $R > r$, $d > R + r$). La retta congiungete i due centri è perpendicolare alla piazza. Durante la notte, la seconda sfera si illumina, diffondendo la sua luce in tutte la direzioni.

  (a) Determinare, in funzione di r, R, h, d, l'area della parte di piazza che rimane in ombra (costituita dai punti guardando dai quali la seconda sfera è *totalmente* nascosta dietro la prima).

  (b) Determinare, in funzione di r, R, h, d, l'area della parte di piazza che rimane in penombra (costituita dai punti riguardando dai quali la seconda sfera è *parzialmente* nascosta dietro la prima)

  (c) Discutere il caso limite $d \to +\infty$ (cioè dire cosa succede alla zona d'ombra e di penombra quando d è molto grande rispetto ad r, R, h).

- Per poter usufruire di una borsa di studio, uno studente deve superare un test costituito da 10 domande, per ciascuna delle quali vengono proposte diverse risposte, di cui una solamente giusta. Per ogni domanda il punteggio è +1 se lo studente indica la risposta giusta, -1 se lo studente indica una risposta sbagliata, 0 se lo studente non risponde. Il test si considera superato se il punteggio totale, ottenuto sommando i punteggi ottenuti nella 10 domande, è *5*.

Diciamo che uno studente ha preparazione *p* (con $0 \leq p \leq 1$) se egli ha probabilità *p* di rispondere correttamente alle singole domande.
Determinare, in funzione di *p*, la strategia che lo studente deve seguire (cioè il numero di domanda alle quali provare a rispondere) per massimizzare la sua probabilità di superare il test. Calcolare anche tale probabilità (sempre in funzione di *p*).

- La serratura della valigia di Anna è dotata di una combinazione composta da cinque cilindri affiancati, ognuno dei quali può assumere ciclicamente 10 posizioni, contrassegnate nell'ordine dalle lettere *A,B,C,D,E,F,M,N,O,P*.

  Il congegno dovrebbe permettere lo spostamento di ogni singolo cilindro dalla lettera su cui è posizionato alla lettera successiva o precedente. Esso però non è perfettamente funzionante, e quando viene spostato di una posizione un qualsiasi cilindro, allora anche un cilindro adiacente (e solo uno) si sposta di una posizione nello stesso verso (per esempio supponiamo che la serratura sia posizionata sulla parola *NONNA,* e che si sposti il quarto cilindro dalla *N* alla *M:*
  allora anche il terzo cilindro si sposta dalla *N* alla *M*, o il quinto cilindro si sposta dalla *A* alla *P).* Si noti che muovendo successivamente un cilindro, quello adiacente che si sposta può essere diverso da quello che si è spostato in precedenza. Ovviamente se ad essere spostati sono il primo od il quinto cilindro, allora a muoversi saranno il secondo od il quarto, rispettivamente.
  Attualmente la serratura è posizionata sulla parola *AAAAA.*
  Sapendo che la serratura si libera solo sulla parola *BABBO,* può riuscire Anna ad aprire la valigia?
  E se la serratura si liberasse sulla parola *MAMMA?*

- Trovare tutte le coppie (x,y) di numeri reali tali che

$$\sqrt[15]{x}-\sqrt[15]{y}=\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$$

L'aeroporto A si trova a latitudine θ e longitudine α; l'aeroporto B si trova a latitudine θ e longitudine $\alpha+\varphi$ (con $0 < \theta < \pi/2$ e $0 < \varphi < \pi$). Un aereo parte da A e fa rotta verso B seguendo il cammino più breve, che come è noto è il minore dei due archi di cerchio massimo passati per A e B.

(a) Determinare, in funzione di θ *e* φ, la massima latitudine alla quale passerà l'aereo.

(b) Tenendo φ fisso, discutere il caso limite $\theta \to 0$.

(c) Tenendo θ fisso, discutere il caso limite $\varphi \to \pi$.

N.B. si approssimi la terra ad una sfera e si trascuri l'altezza alla quale vola l'aereo.

- Comunque si scelgono quattro studenti della Scuola Sant'Anna, ce n'è almeno uno dei quattro che è amico degli altri tre. Dimostrare che esiste almeno uno studente della Scuola che è amico di tutti gli altri.

  N.B. Si usi la convenzione A amico di B implica B amico di A.

- Un dado perfettamente equilibrato con facce numerate da 1 a 6 viene lanciato più volte.

(a) Qual è la probabilità che lanciandolo 3 volte la somma dei punteggi ottenuti sia divisibile per 6?

(b) Qual è la probabilità che lanciandolo 3 volte la somma dei punteggi ottenuti sia divisibile per 7?

(c) Qual è la probabilità che lanciandolo n volte la somma dei punteggi ottenuti sia divisibile per 6?

(d) Qual è la probabilità che lanciandolo n volte la somma dei punteggi ottenuti sia divisibile per 7?

- Francia, Germania, Italia e Spagna partecipano ad un girone a quattro di una competizione calcistica internazionale. Ogni squadra incontra ciascuna delle altre tre una ed una sola volta, in partite in cui si assegnano tre punti per la vittoria, uno per il pareggio e zero per la sconfitta. Al termine del girone i punteggi delle squadre sono quattro interi consecutivi. Sapendo che l'Italia ha battuto la Germania, la quale a sua volta ha battuto la Spagna, determinare se è possibile dedurre in modo univoco la classifica finale del girone.

- Sia P un punto interno ad una circonferenza T, distinto dal centro O. Determinare i punti Q di T per cui l'angolo

$$O\hat{Q}P$$

risulta massimo.

- Determinare la più piccola costante a tale che

$$6x^2 + y^2 + a \geq 4xy + y$$

per ogni x ed y interi. Per tale valore di a determinare le coppie (x,y) di numeri reali per cui si ha uguaglianza

Determinare la più piccola costante a tale che

$$6x^2 + y^2 + a \geq 4xy + y$$

per ogni x ed y interi. Per tale valore di a determinare le coppie (x,y) di interi per cui si ha uguaglianza.

- Paolo e Francesca, due studenti della Scuola S. Anna, decidono di giocare nel seguente modo. Detto X l'insieme {1,2,3,4,5,6}, Paolo sceglie un elemento n_1 di X; poi Francesca sceglie un elemento n_2 di X (non necessariamente diverso dal precedente), poi ancora Paolo sceglie un elemento n_3 ed infine Francesca un elemento n_4. Francesca vince se l'intero

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

risulta divisibile per 9, altrimenti vince Paolo.

(a) determinare quale dei due giocatori ha una strategia vincente.

(b) Stessa domanda nel caso in cui i due giocatori scelgano alternativamente K elementi di X ciascuno (e quindi N è la somma di 2K interi).